ECOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

CONCOURS D'ENTRÉE
1978
OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur.

Dans tout le problème $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On rappelle qu'une fonction monotone admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

I

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

(1) $a_o = a > 0$, $b_o = b > 0$

et

(2) $a_n = \sqrt{a_{n-1}.b_{n-1}}$, $b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ $\forall n \geqslant 1$

1°) a) Montrer qu'on a $a_n \leqslant b_n$ $\forall n \geqslant 1$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Montrer qu'elles sont convergentes.

Montrer enfin qu'elles ont même limite. On notera cette limite M(a , b) sans chercher à la calculer.

On a ainsi défini une application de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$: $(a , b) \longmapsto M(a , b)$

2°) Montrer que M(a , b) vérifie les propriétés suivantes :

$M(\lambda a , \lambda b) = \lambda M(a , b)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$; $M(a, b) = M(b , a)$; $M(a , b) = M\left(\sqrt{ab} , \dfrac{a + b}{2}\right)$

$a \leqslant a' \Longrightarrow M(a , b) \leqslant M(a' , b)$.

3°) On note $f(x) = M(x, 1)$

Montrer que f vérifie les relations :

$f(1) = 1$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} f(x)$; $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1 + x}{2}$;

$\dfrac{1 + x}{2} f\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1 + x}\right) = f(x)$

4°) a) Montrer que, si g est une application croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et si la fonction $x \longmapsto \dfrac{g(x)}{x}$ est décroissante, alors g est continue.

b) Montrer que la fonction f est continue.

5°) a) Montrer que f(x) admet une limite quand x tend vers $+\infty$.
Quelle est cette limite ?

b) Montrer que f(x) admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs positives.
Quelle est cette limite ?

c) Tracer la courbe représentative de f en précisant le comportement de f à l'origine et à l'infini.

II

On définit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$u_o = a > 0$, $v_o = b > 0$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}.v_n}$, $v_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$ $\forall n \geqslant 1$

On suppose $b < a$ et on écrit $b = a \cos\theta$ avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

1°) Calculer u_n et v_n en fonction de n et de θ .

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

2°) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont une même limite N(a, b)

que l'on calculera en fonction de a et de θ . (On pourra utiliser $u_n.\sin\dfrac{\theta}{2^n}$) .

.../...

M 166

3°) Montrer par récurrence que $u_n \geqslant a_n$ et $v_n \geqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies par les relations (1) et (2)

4°) Calculer $M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

5°) Comparer $N(a, b)$ et $M(a, b)$. Peut-il y avoir égalité ?

III

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On note $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}$

et, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = I(x, 1)$.

1°) Montrer que F est monotone.

2°) Montrer les égalités $y.I(x, y) = F(\frac{x}{y})$ et $F(\frac{1}{x}) = x\,F(x)$.

3°) En déduire, par exemple en appliquant la question I 4°) a) à $\frac{1}{F}$, que F est continue.

4°) Montrer que l'application de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) fait correspondre $I(x, y)$ est continue.

IV

On admettra la convergence de toutes les intégrales qui interviendront.
a et b sont maintenant des réels vérifiant $0 < a < b$.

1°) On pose $u = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$ $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

Calculer φ en fonction de u. Calculer $\frac{d\varphi}{du}$

Montrer qu'on a

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}}$$

2°) a) On pose $h(u) = \frac{u^2 + ab}{2u}$ .Trouver $\alpha \in]a, b[$ tel que h admette une fonction réciproque H_1 sur $]a, \alpha]$ et une fonction réciproque H_2 sur $[\alpha, b[$.

b) Expliciter les fonctions $v \longrightarrow H_1(v)$ et $v \longrightarrow H_2(v)$.

3°) Montrer que, si $v = h(u)$ on a $2u\sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - v^2} = \sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}$

Faire le changement de variable $v = h(u)$ dans $I(a, b)$, en séparant les intervalles $]a, \alpha]$ et $[\alpha, b[$

4°) a) En déduire l'égalité $I(a, b) = I\left(\sqrt{ab}, \frac{a + b}{2}\right)$

b) Calculer $I(a, b)$ en fonction de $M(a, b)$ et $F(x)$ en fonction de $f(x)$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail